

2025 적분 챔피언십: 4강

방승재(수리과학부 21), 이현서(자유전공학부 23), 윤준오(첨단융합학부 24)

4강 1경기

문제 1

$$\int e^{\cos(x) - \sin(x)} \cos(2x + \sin(x) + \cos(x)) dx$$

풀이. 오일러 공식에 의해

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \left(\int e^{\cos(x) - \sin(x)} e^{i(2x + \sin(x) + \cos(x))} dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int e^{2ix} e^{\cos x + i \sin x} e^{i(\cos x + i \sin x)} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\int (e^{ix})^2 e^{(1+i)e^{ix}} dx \right) \end{aligned}$$

이다. $t = e^{ix}$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \left(\int t e^{(1+i)t} \frac{dt}{i} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \int t e^{(1+i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\left(\frac{t}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2} \right) e^{(1+i)t} \right) = \operatorname{Im} \left(\left(\frac{1-i}{2} t + \frac{i}{2} \right) e^{(1+i)t} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\cos x + \sin x}{2} + i \frac{1 - \cos x + \sin x}{2} \right) e^{\cos x - \sin x} (\cos(\cos x + \sin x) + i \sin(\cos x + \sin x)) \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} e^{\cos x - \sin x} ((1 - \cos x + \sin x) \cos(\cos x + \sin x) + (\cos x + \sin x) \sin(\cos x + \sin x))} \end{aligned}$$

문제 2

$$\int_0^\infty \log(1 + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + e^{-6x} + e^{-7x} + e^{-9x}) dx$$

풀이. $(1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^9) = (1 + t^2)(1 + t^3)(1 + t^4)$ 이므로

$$I = \int_0^\infty \log((1 + e^{-2x})(1 + e^{-3x})(1 + e^{-4x})) dx = I_2 + I_3 + I_4$$

단, $I_m = \int_0^\infty \log(1 + e^{-mx})$ 이다. 또한

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^\infty \log(1 + e^{-mx}) dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \left((-1)^{n-1} \frac{e^{-nm x}}{n} \right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left((-1)^{n-1} \frac{e^{-nm x}}{n} \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(-1)^{n-1} e^{-nm x}}{n^2 m} \right]_0^\infty = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{(2n)^2} \right) = \frac{\pi^2}{12m} \end{aligned}$$

이므로

$$I = I_2 + I_3 + I_4 = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{13\pi^2}{144}}$$

문제 3

$$\int_0^\infty \frac{xe^x}{e^{2x} - 1} dx$$

풀이. $\int_0^\infty xe^{-ax} dx = 1/a^2$ 이므로

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty xe^x \cdot \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} dx = \int_0^\infty xe^x \sum_{n=1}^\infty e^{-2nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty xe^{-(2n-1)x} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}} \end{aligned}$$

문제 4

$$\int_0^{\pi/6} \frac{e^{\sin x} (1 + \cos^2 x)}{1 - \sin x} dx$$

풀이. $t = \sin x$ 치환을 하면

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} \frac{e^t (2 - t^2)}{(1-t)\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{1/2} \frac{e^t (1 + 1 - t^2)}{(1-t)\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{1/2} \left(\frac{e^t}{(1-t)\sqrt{1-t^2}} + e^t \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right) dt \\ &= \int_0^{1/2} \left(e^t \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right)' + (e^t)' \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right) dt = \left[e^t \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right]_0^{1/2} = \boxed{\sqrt{3e} - 1} \end{aligned}$$

타이브레이커 문제 1

$$\int_0^\infty (\log(e^x + 1) - x) dx$$

풀이. 피적분 함수가 $\log(e^x + 1) - x = \log(1 + e^{-x})$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \log(1 + e^{-x}) dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \left((-1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n} \right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left((-1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n} \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{n^2} \right]_0^\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{(2n)^2} \right) = \boxed{\frac{\pi^2}{12}} \end{aligned}$$

4장 2경기

문제 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \left(e^{x-n} \sum_{k=0}^n \frac{x^2 n^k}{k!} \right) dx$$

풀이. 확률변수 X_n 이

$$P(X_n = k) = e^{-n} \frac{n^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

를 만족한다고 하자. 또한, 서로 독립인 n 개의 확률변수 $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ ($1 \leq i \leq n$)이

$$P(X'_i = k) = e^{-1} \frac{1}{k!} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

을 만족한다고 하자. 이 때

$$\begin{aligned} P(X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n = k) &= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} P(X'_1 = k_1) P(X'_2 = k_2) \dots P(X'_n = k_n) \\ &= e^{-n} \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} = e^{-n} \frac{n^k}{k!} \end{aligned}$$

이므로 $X_n = X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n$ 이다.

중심극한정리에 의해 분포 $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n - n)$ 은 $n \rightarrow \infty$ 일 때 정규분포 Z 에 수렴한다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq 0) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}$$

이다. 주어진 적분은

$$I = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \right) \left(\int_0^2 x^2 e^x dx \right) = \frac{1}{2} \cdot [(x^2 - 2x + 2)e^x]_0^2 = \boxed{e^2 - 1}$$

문제 2

$$\int_1^\infty \frac{\log(x+1) - \log(x)}{x^2 + 1} dx$$

풀이. $t = 1/x$ 로 치환하면

$$I = \int_1^0 \frac{\log(\frac{1}{t} + 1) - \log(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t^2} + 1} \left(-\frac{1}{t^2} dt \right) = \int_0^1 \frac{\log(t+1)}{t^2 + 1} dt$$

이고, 다시 $t = \tan \theta$ 로 치환하면

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(\tan \theta + 1)}{\tan^2 \theta + 1} \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta$$

이다. 이 때 $\theta \mapsto \pi/4 - \theta$ 로 치환하면

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1 + \tan \theta}\right) d\theta$$

이므로 두 식을 더하면

$$2I = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta + \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1 + \tan \theta}\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \log 2 d\theta = \frac{\pi}{4} \log 2$$

를 얻는다. 따라서

$$I = \boxed{\frac{\pi}{8} \log 2}$$

문제 3

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[2025]{1 - x^{2025}}} dx$$

풀이. $t = x^{2025}$ 로 치환하면 $dt = 2025x^{2024} dx = 2025t^{\frac{2024}{2025}} dx$ 이므로

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[2025]{1 - t}} \frac{1}{2025t^{\frac{2024}{2025}}} dt = \frac{1}{2025} \int_0^1 t^{-\frac{2024}{2025}} (1 - t)^{-\frac{1}{2025}} dt$$

이다. 베타함수의 정의와 감마함수의 반사 공식을 활용하면

$$I = \frac{1}{2025} B\left(\frac{1}{2025}, \frac{2024}{2025}\right) = \frac{1}{2025} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2025})\Gamma(\frac{2024}{2025})}{\Gamma(1)} = \boxed{\frac{\pi}{2025 \sin(\pi/2025)}}$$

문제 4

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\log x^\pi) \cos(\log x^e)}{x^2 \log x} dx$$

풀이. 우선 $\sin(\log x^\pi) \cos(\log x^e) = \sin(\pi \log x) \cos(e \log x)$ 이다. $x \mapsto 1/x$ 치환하면

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi \log x) \cos(e \log x)}{\log x} dx$$

을 얻는다. 삼각함수 공식 $\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$ 에 의해

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\sin((\pi+e) \log x)}{\log x} + \frac{\sin((\pi-e) \log x)}{\log x} \right) dx$$

이다.

함수 $I(a)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\sin(a \log x)}{\log x} dx$$

이 때

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sin(a \log x)}{\log x} \right) dx = \int_0^1 \cos(a \log x) dx = \int_0^\infty e^{-t} \cos(at) dt = \frac{1}{a^2 + 1}$$

이다. 단, 중간에 $t = -\log x$ 치환을 사용하였다. 양변을 적분하면

$$I(a) = \arctan(a) + C$$

을 얻고, $I(0) = \int_0^1 0 dx = 0$ 이므로 $I(a) = \arctan(a)$ 이다. 따라서

$$I = \frac{I(\pi + e) + I(\pi - e)}{2} = \boxed{\frac{\arctan(\pi + e) + \arctan(\pi - e)}{2}}$$