2025 적분 챔피언십: 8강

방승재(수리과학부 21), 이현서(자유전공학부 23), 윤준오(첨단융합학부 24)

8강 1경기

문제 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \det\left[\exp\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \\ ex^3 & -ex^2 & ex \\ -x^4 & x^3 & -x^2 \end{pmatrix}\right] dx$$

풀이. 모든 정사각행렬 A에 대해 $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$가 성립한다. 따라서

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \det\left[\exp\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \\ ex^3 & -ex^2 & ex \\ -x^4 & x^3 & -x^2 \end{pmatrix}\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2-ex^2-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ex^2}\,dx = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{e}}}$$

문제 2

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nx+k}\right) dx$$

풀이. $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nx+k}$ 라고 하자. 먼저

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k/n} = \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,dt = \log(x+1) - \log(x)$$

임을 관찰한다. $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nx+k} \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{nx} = \frac{1}{x}$ 이므로 지배수렴정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^2 (\log(x+1) - \log(x))\,dx$$

$$= [(x+1)\log(x+1) - x\log x]_1^2 = \boxed{\log\frac{27}{16}}$$

문제 3

$$\int_0^{\pi^2} \left(\sin\sqrt{x}\right)^{2025} dx$$

풀이. $x = t^2$ 치환하면

$$I = 2\int_0^{\pi} t\sin^{2025} t\,dt$$

이다. 피적분 함수를 $t\sin^{10} t = \left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin^{2025} t + \frac{\pi}{2}\sin^{2025} t$ 와 같이 쪼갠다. 이 때 함수 $\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin^{2025} t$ 는 $(\pi/2, 0)$를 중심으로 점대칭을 이루므로, 0에서 π까지 적분한 값은 0이다. 따라서

$$I = 2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^{2025} x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\sin^{2025} x\,dx$$

이다. 이제 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ 라고 하면 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$이므로

$$I = \pi\cdot\frac{2024}{2025}\cdot\frac{2022}{2023}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \boxed{\frac{2^{2025}(1012!)^2}{2025!}\pi}$$

8강 2경기

문제 1

$$\int\frac{x^4}{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)}\,dx$$

풀이. $f(x) = e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)$ 라고 하자. 그러면 $f'(x) = e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)$ 이므로, 주어진 적분은

$$I = \int\frac{x^4}{f(x)}\,dx = \int\frac{24(f'(x)-f(x))}{f(x)}\,dx = \int\left(-24+24\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx = -24x + 24\log f(x)$$

$$= \boxed{-24x+24\log\left(e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)\right)}$$

문제 2

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^2 dx$$

풀이. 다음과 같은 항등식이 성립한다.

$$\frac{1-e^{-x}}{x} = \int_0^1 e^{-ux}\,du \quad (x>0)$$

양변을 제곱하여 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^2 = \int_0^1\int_0^1 e^{-(u+v)x}\,du\,dv$$

따라서

$$I = \int_0^{\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^2 dx = \int_0^1\int_0^1\left(\int_0^{\infty}e^{-(u+v)x}\,dx\right)du\,dv = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{u+v}\,du\,dv$$

이다. 이어서 계산하면

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 [\log(u+v)]_{u=0}^{u=1}\,dv = \int_0^1 (\log(v+1) - \log(v))\,dv \\
&= [(v+1)\log(v+1) - v\log(v)]_0^1 = \boxed{2\log 2}
\end{aligned}
$$

> **문제 3**
>
> $$\lim_{A\to\infty}\int_0^{\pi} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx$$

풀이.

$$I_A = \int_0^{\pi} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx$$

라고 정의하자. 주어진 피적분함수가 $x = \pi/2$에 대해 대칭이므로

$$I_A = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx$$

이다. 충분히 큰 A에 대해 $\delta = A^{-1/4}$로 두고, 적분 구간을 다음과 같이 쪼갠다.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\delta} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx + \int_{\delta}^{\pi/2} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx$$

우변의 두 번째 항은 $A \to \infty$일 때 0으로 수렴하는데, $x \geq \delta \Rightarrow \sin x \geq \sin\delta$ 이므로

$$0 \leq \int_{\delta}^{\pi/2} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx \leq \int_{\delta}^{\pi/2} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 \delta}\,dx = \sqrt{A}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)e^{-A\sin^2\delta}$$

에서 $A\sin^2\delta \sim A^{1/2} \to \infty$ 이기 때문이다. 이제 첫 번째 항이 $\sqrt{\pi}/2$로 수렴함을 보인다. $t = \sqrt{A}\sin x$ 치환하면

$$\int_0^{\delta} \sqrt{A}e^{-A\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\sqrt{A}\sin\delta} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{1-t^2/A}}\,dt$$

를 얻는다. 이 때 δ가 충분히 작으면

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2/A}} \leq \frac{1}{1-t^2/A} \leq 1 + 2\frac{t^2}{A}, \quad \text{for all } 0 \leq t \leq \sqrt{A}\sin\delta$$

이므로 부등식

$$\int_0^{\sqrt{A}\sin\delta} e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^{\sqrt{A}\sin\delta} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{1-t^2/A}}\,dt \leq \int_0^{\sqrt{A}\sin\delta} e^{-t^2}\left(1 + \frac{2}{A}t^2\right)dt$$

를 얻는다. $A \to \infty$일 때 $\sqrt{A}\sin\delta \sim A^{1/4} \to \infty$ 이므로 하한과 상한의 극한은 각각 $\sqrt{\pi}/2$, $\sqrt{\pi}/2 + 0 \cdot \sqrt{\pi}/4$이다. 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^{\sqrt{A}\sin\delta} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{1-t^2/A}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

를 얻고, 따라서

$$I = \lim_{A\to\infty} I_A = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \boxed{\sqrt{\pi}}$$

8강 3경기

문제 1

$$\int_0^{\pi/3} \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+(\sin x)^{2^k}\right)dx$$

풀이. 주어진 범위에서 $|\sin x| < 1$ 이므로

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+(\sin x)^{2^k}\right) = (1+\sin x)(1+\sin^2 x)(1+\sin^4 x)\cdots = 1+\sin x+\sin^2 x+\cdots = \frac{1}{1-\sin x}$$

이다. 이제 바이어슈트라스 치환 $t=\tan(x/2)$를 사용하면

$$\int_0^{\pi/3}\frac{1}{1-\sin x}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dx = 2\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{(1-t)^2}\,dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}-1\right) = \boxed{\sqrt{3}+1}$$

문제 2

$$\int \frac{x}{\sqrt{(e^x-x-1)(e^x+x+1)}}\,dx$$

풀이. $t=(x+1)/e^x$ 로 치환하면 $dt = -x/e^x\,dx$ 이므로

$$\int \frac{x}{\sqrt{(e^x-x-1)(e^x+x+1)}}\,dx = \int \frac{\frac{x}{e^x}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2}}\,dx = -\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dx$$

$$= -\arcsin(t) = \boxed{-\arcsin\left(\frac{x+1}{e^x}\right)}$$

문제 3

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\,dx$$

풀이. $\phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ 라고 하면 $\phi^2-\phi-1=0$이 성립한다. $t=1/x$로 치환하면

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^\phi)^\phi}\,dx = \int_0^\infty \frac{t^{\phi^2-2}}{(1+t^\phi)^\phi}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^{\phi-1}}{(1+t^\phi)^\phi}\,dt$$

을 얻는다. 다시 $u = 1 + t^\phi$로 한번 더 치환하면

$$I = \frac{1}{\phi}\int_1^\infty \frac{1}{u^\phi}\,du = \frac{1}{\phi(\phi-1)} = \boxed{1}$$

타이브레이커 문제 1

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

풀이. $t = \pi - x$ 치환하면

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$$

이므로

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi[-\arctan(\cos x)]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$I = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

8강 4경기

문제 1

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + e^{-x}}\,dx$$

풀이. $(\log(1 + e^x \sin x))' = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{1+e^x\sin x}$ 임을 관찰한다. 따라서

$$I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{1+e^x\sin x}\,dx = \boxed{\log(1+e^x\sin x)}$$

문제 2

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \cdots}}}}\,dx$$

풀이. $x > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{1+x(x+2)} \\ &= \sqrt{1+x\sqrt{(x+2)^2}} = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+3)}} \\ &= \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{(x+3)^2}}} = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}} = \dots \end{aligned}$$

따라서 주어진 피적분 함수는 $x+1$과 같다. 적분 값은

$$\int_0^1 (x+1)\,dx = \boxed{\frac{3}{2}}$$

문제 3

$$\int_0^{2025} \left(\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil - \left\lfloor \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rfloor\right) dx$$

풀이.

$$\begin{aligned} \int_0^{2025} \left(\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil - \left\lfloor \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rfloor\right) dx &= \sum_{n=0}^{2024}\left(\lceil \sqrt{n} \rceil - \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor\right) = \sum_{n=0}^{2024}\lceil \sqrt{n} \rceil - \sum_{n=1}^{2025}\lfloor \sqrt{n} \rfloor \\ &= -\left\lfloor \sqrt{2025} \right\rfloor + \sum_{n=1}^{2024}\left(\lceil \sqrt{n} \rceil - \lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) \end{aligned}$$

이 때

$$\lceil \sqrt{n} \rceil - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \begin{cases} 0, & n \text{ is square} \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다. $2025 = 45^2$ 미만의 제곱수는 44개이므로, 원하는 적분은

$$I = -45 + (2024 - 44) = \boxed{1935}$$

타이브레이커 문제 2

$$\int \frac{1}{x^{1/3} + x^{2/3}}\,dx$$

풀이. $t = x^{1/3}$ 치환하면

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t+t^2}(3t^2\,dt) = 3\int \frac{t}{1+t}\,dt = 3\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 3(t - \log(t+1)) = \boxed{3\left(x^{1/3} - \log\left(x^{1/3}+1\right)\right)} \end{aligned}$$