2025 적분 챔피언십: 결승

방승재(수리과학부 21), 이현서(자유전공학부 23), 윤준오(첨단융합학부 24)

결승

문제 1

$$\int_0^{\pi/2} \log(2025+\tan^2(x))\,dx$$

풀이. $I(a)=\int_0^{\pi/2}\log(a+\tan^2(x))\,dx$ 라고 정의하자. 양변을 a로 미분하고 $t=\tan x$ 치환하면

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial a}(\log(a+\tan^2(x)))\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{a+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{(t^2+1)(t^2+a)}\,dt \\ &= \frac{1}{a-1}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+a}\right)dt = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{\sqrt{a}(a-1)}\right) \end{aligned}$$

을 얻는다. 양변을 a로 적분하면

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{\pi}{2}\int\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{\sqrt{a}(a-1)}\right)da \overset{u=\sqrt{a}}{=} \frac{\pi}{2}\left(\log|a-1|-2\int\frac{1}{u^2-1}\,du\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\log|a-1|+\log\left|\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right|\right)+C = \pi\log\big(\sqrt{a}+1\big)+C \end{aligned}$$

이다. 이 때

$$I(0)=2\int_0^{\pi/2}\log(\tan x)\,dx \overset{x\mapsto\frac{\pi}{2}-x}{=} 2\int_0^{\pi/2}\log(\cot x)\,dx = -I(0)$$

이므로 $I(0)=0$와 $C=0$을 얻는다. 따라서

$$I=I(2025)=\boxed{\pi\log 46}$$

문제 2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\cosh^2(8^x)-\cosh(8^x)-1}{2\cosh^3(8^x)-\cosh(8^x)}\,dx$$

풀이. $\cosh(2t)=2\cosh^2(t)-1$이므로

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(2\cosh^2(8^x)-1)-\cosh(8^x)}{(2\cosh^2(8^x)-1)\cosh(8^x)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh(2\cdot 8^x)-\cosh(8^x)}{\cosh(2\cdot 8^x)\cosh(8^x)}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\operatorname{sech}(8^x)-\operatorname{sech}(2\cdot 8^x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\big(\operatorname{sech}(8^x)-\operatorname{sech}\big(8^{x+1/3}\big)\big)\,dx \end{aligned}$$

이다. 또한 해당 이상적분이 잘 정의되므로

$$I = \lim_{a\to-\infty}\int_a^\infty \left(\operatorname{sech}(8^x) - \operatorname{sech}\left(8^{x+1/3}\right)\right) dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\int_a^\infty \operatorname{sech}(8^x)\, dx - \int_a^\infty \operatorname{sech}\left(8^{x+1/3}\right) dx\right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\int_a^\infty \operatorname{sech}(8^x)\, dx - \int_{a+1/3}^\infty \operatorname{sech}(8^x)\, dx\right) = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{a+1/3} \operatorname{sech}(8^x)\, dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{3}\operatorname{sech}(8^\alpha)$$

마지막 등호에서는 평균값 정리를 사용하였으며, $a < \alpha < a + \frac{1}{3}$ 이다. $\alpha \to -\infty$일 때 $\operatorname{sech}(8^\alpha) \to 1$ 이므로 마지막 극한은 1/3이고, 따라서

$$I = \boxed{\frac{1}{3}}$$

문제 3

$$\int \left|\begin{pmatrix} \operatorname{sech}^2 x & \operatorname{csch}^2 x & \operatorname{sech}^2 x & \tanh^2 x \\ \sinh^2 x & \tanh^2 x & \cosh^2 x & \coth^2 x \\ \operatorname{csch}^2 x & \coth^2 x & \operatorname{csch}^2 x & \sinh^2 x \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| dx$$

풀이. 세 번째 열에서 첫 번째 열을 빼면 $(0,1,0,0)$이다. 해당 열을 기준으로 여인수전개하면

$$\left|\begin{pmatrix} \operatorname{sech}^2 x & \operatorname{csch}^2 x & \operatorname{sech}^2 x & \tanh^2 x \\ \sinh^2 x & \tanh^2 x & \cosh^2 x & \coth^2 x \\ \operatorname{csch}^2 x & \coth^2 x & \operatorname{csch}^2 x & \sinh^2 x \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \operatorname{sech}^2 x & \operatorname{csch}^2 x & 0 & \tanh^2 x \\ \sinh^2 x & \tanh^2 x & 1 & \coth^2 x \\ \operatorname{csch}^2 x & \coth^2 x & 0 & \sinh^2 x \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right|$$

$$= -\left|\begin{pmatrix} \operatorname{sech}^2 x & \operatorname{csch}^2 x & \tanh^2 x \\ \operatorname{csch}^2 x & \coth^2 x & \sinh^2 x \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right|$$

다시 세 번째 행을 기준으로 여인수전개하면

$$-\left|\begin{pmatrix} \operatorname{sech}^2 x & \operatorname{csch}^2 x & \tanh^2 x \\ \operatorname{csch}^2 x & \coth^2 x & \sinh^2 x \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right| = -2\left(\operatorname{csch}^2 x \sinh^2 x - \tanh^2 x \coth^2 x\right) - 5\left(\operatorname{sech}^2 x \coth^2 x - \operatorname{csch}^4 x\right)$$

$$= -5\left(\operatorname{csch}^2 x - \operatorname{csch}^4 x\right) = -5\left(\operatorname{csch}^2 x - \operatorname{csch}^2 x\left(\coth^2 x - 1\right)\right)$$

$$= -10\operatorname{csch}^2 x + 5\operatorname{csch}^2 x \coth^2 x$$

따라서

$$I = \int \left(-10\operatorname{csch}^2 x + 5\operatorname{csch}^2 x \coth^2 x\right) dx = \boxed{10\coth x - \frac{5}{3}\coth^3 x}$$

문제 4

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(12x)}{\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\sin(4x)}\,dx$$

풀이. 모든 복소수 $z \neq n\pi$ 에 대하여 다음과 같은 항등식이 성립한다.

$$\frac{\sin nz}{\sin z} = \frac{e^{-inz}-e^{-inz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = \frac{e^{-inz}}{e^{-iz}}\frac{e^{2inz}-1}{e^{2iz}-1} = e^{-i(n-1)z}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikz}$$

또한 $z \mapsto -z$ 를 대입하면

$$\frac{\sin nz}{\sin z} = e^{i(n-1)z}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2ikz}$$

을 얻는다. 이제 정수 a, b, c, d, n, m, k, l에 대해

$$\begin{aligned}\frac{\sin nax}{\sin ax}\cdot\frac{\sin mbx}{\sin bx}\cdot\frac{\sin kcx}{\sin cx}\cdot\frac{\sin ldx}{\sin dx} &= \left(e^{-i(n-1)ax}\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{2i\alpha ax}\right)\left(e^{-i(m-1)bx}\sum_{\beta=0}^{m-1} e^{2i\beta bx}\right)\\ &\quad\cdot\left(e^{i(k-1)cx}\sum_{\gamma=0}^{k-1} e^{-2i\gamma cx}\right)\left(e^{i(l-1)dx}\sum_{\delta=0}^{l-1} e^{-2i\delta dx}\right)\\ &= e^{-ix((n-1)a+(m-1)b-(k-1)c-(l-1)d)}\sum e^{2i(\alpha a+\beta b-\gamma c-\delta d)x}\end{aligned}$$

이 성립한다. 단, 마지막 줄에서 합은

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^4 \cap ([0, n-1]\times[0, m-1]\times[0, k-1]\times[0, l-1])$$

에 대해서 더했다. $a = 1, b = 4, c = 2, d = 3, na = mb = kc = ld = 12$를 대입하면 $(n-1)a + (m-1)b-(k-1)c-(l-1)d = 0$ 이므로

$$I = \int_0^{2\pi} \sum e^{2i(\alpha+4\beta-2\gamma-3\delta)x}\,dx$$

이다. 그런데

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{when } n = 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

이므로 결국

$$I = 2\pi\cdot\#\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \mid \alpha+4\beta = 2\gamma+3\delta, 0\le\alpha\le 11, 0\le\beta\le 2, 0\le\gamma\le 5, 0\le\delta\le 3\}$$

이다. 직접 개수를 세어보면 조건을 만족하는 격자점의 개수는 50개이다.

$$I = 2\pi\cdot 50 = \boxed{100\pi}$$

문제 5

$$\int_{-2025\pi}^{2025\pi} \frac{\cos^2(2025x)}{(1+e^{x^{2025}})\cos^2(x)}\,dx$$

풀이. $x \mapsto -x$ 치환 뒤 원래 식과 더하면

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{-2025\pi}^{2025\pi} \frac{\cos^2(2025x)}{(1+e^{x^{2025}})\cos^2(x)}\,dx + \int_{-2025\pi}^{2025\pi} \frac{e^{x^{2025}}\cos^2(2025x)}{(1+e^{x^{2025}})\cos^2(x)}\,dx \\ &= \int_{-2025\pi}^{2025\pi} \frac{\cos^2(2025x)}{\cos^2(x)}\,dx = 2\cdot 2025\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(2025x)}{\cos^2(x)}\,dx \end{aligned}$$

이다. 다시 $x \mapsto \pi/2 - x$ 로 치환하면

$$I = 2\cdot 2025\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(2025x)}{\sin^2(x)}\,dx$$

을 얻는다. 모든 자연수 n에 대해 $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$ 이라고 정의하자.

$$\begin{aligned} I_{n+2} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+2)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin(n+2)x + \sin(nx))(\sin(n+2)x - \sin(nx))}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(n+1)x\cos x \cdot 2\cos(n+1)x\sin x}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(2n+2)x\cos x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+3)x + \sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = J_{2n+1} + J_{2n+3} \end{aligned}$$

단, $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ 이다. 이제 J_n에 대한 점화식을 다시 찾아보자.

$$\begin{aligned} J_{n+2} - J_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(n+2)x - \sin nx}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos(n+1)x}{\sin x}\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \cos(n+1)\,dx = 2\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

n이 홀수이면 $(n+1)/2$ 은 정수이므로 $J_{n+2} = J_n = \cdots = J_1 = \pi/2$ 이다. 따라서

$$I_{n+2} - I_n = \pi$$

이고

$$I_{2025} = 1012\pi + I_1 = \frac{2025}{2}\pi$$

이다. 적분 값은

$$I = 2\cdot 2025 I_{2025} = \boxed{2025^2\pi}$$

타이브레이커 문제 1

$$\int \frac{1}{x(1-x)} \arctan\left(\log\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) dx$$

풀이. $t = \arctan(\log(x/(1-x)))$ 치환하면 $\tan t = \log(x/(1-x))$, $\frac{1}{x(1-x)}\,dx = \sec^2 t\,dt$ 이므로

$$\begin{aligned} I &= \int t\sec^2 t\,dt = t\tan t + \log(\cos t) \\ &= \log\left(\frac{x}{1-x}\right)\arctan\left(\log\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{\log^2\left(\frac{x}{x-1}\right)+1}}\right) \\ &= \boxed{\log\left(\frac{x}{1-x}\right)\arctan\left(\log\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) - \frac{1}{2}\log\left(\log^2\left(\frac{x}{x-1}\right)+1\right)} \end{aligned}$$